

渐开线蜗轮齿面建模与测量网格点计算

杨涛, 劳奇成

西安工业大学

摘要: 运用空间啮合原理推导渐开线蜗轮齿面及单位法矢方程式, 并进行实例计算与齿面验证; 对蜗轮齿面进行测量前的网格划分, 得到网格点坐标值及单位法矢值。

关键词: 渐开线蜗轮; 空间啮合原理; 齿面网格化

中图分类号: TH132.44; TH161+12

文献标志码: A

Modeling and Measurement Point Calculation of Involute Worm Gear Surface Mesh

Yang Tao, Lao Qicheng

Abstract: The principle of spatial meshing is used to derive the tooth surface equations and the unit normal vector equation of the involute worm gear. A case is calculated and the tooth surface is verified. The tooth surfaces of the worm gear are meshed before the measurement to calculate the coordinate value of the measuring grid and the unit normal vector coordinates.

Keywords: involute worm gear; principle of spatial meshing; gears' tooth surfaces meshing

1 引言

蜗轮蜗杆齿面几何形状和精度会影响啮合传动的质量、工作寿命和可靠性。蜗轮齿面的测量方法是: 根据蜗轮蜗杆空间啮合关系建立蜗轮齿面模型, 并对齿面按一定规则进行划分, 利用测量机按规划的齿面网格点逐点测量, 得到真实齿面网点的三坐标值和单位法向量值, 与理论齿面对比形成差曲面, 以此计算齿面的整体误差。

本文对蜗轮蜗杆副进行空间啮合分析与建模, 求解蜗轮理论齿面并进行网格划分, 得出网格点的坐标值及法矢值, 为计算齿面误差做准备。

2 蜗轮齿面的计算理论

2.1 蜗杆齿面方程及法矢

渐开线蜗杆的齿面为渐开螺旋面(见图 1), 其端面截形为渐开线, 方程为

$$\begin{cases} x_0 = r_b \cos(\sigma_0 + u) + r_b u \sin(\sigma_0 + u) \\ y_0 = r_b \sin(\sigma_0 + u) - r_b u \cos(\sigma_0 + u) \end{cases} \quad (1)$$

式中, r_b 为端面基圆半径; σ_0 为渐开线起始角; u 为参变量, $u = \angle eoa$ 。

其右旋渐开螺旋面上侧的方程式为

$$\mathbf{r}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ p\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_b \cos\tau + r_b u \sin\tau \\ r_b \sin\tau - r_b u \cos\tau \\ p(\tau - \sigma_0 - u) \end{pmatrix} \quad (2)$$

式中, p 为螺旋参数, $p = \frac{p_z}{2\pi}$; θ 为参变量, 表示母线从起始位置绕 z 轴转过的角度。

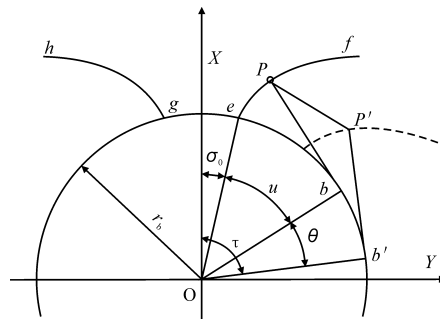


图 1 渐开线螺旋面端截形

其法矢方程式为

$$\mathbf{n}_{x1} = \begin{pmatrix} n_{x1} \\ n_{y1} \\ n_{z1} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial x_1}{\partial u} & \frac{\partial y_1}{\partial u} & \frac{\partial z_1}{\partial u} \\ \frac{\partial x_1}{\partial \theta} & \frac{\partial y_1}{\partial \theta} & \frac{\partial z_1}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} pr_b u \sin\tau \\ -pr_b u \cos\tau \\ r_b^2 u \end{pmatrix} \quad (3)$$

2.2 坐标变换

根据啮合原理建立蜗轮蜗杆的空间坐标系(见图 2)。其中 $S_1(O_1 - x_1, y_1, z_1)$ 为蜗杆的固定坐标系, 蜗杆中心轴与 z_1 轴重合, 可绕 z_1 旋转; $S_2(O_2 - x_2, y_2, z_2)$ 为蜗轮的固定坐标系, 且蜗轮中心轴与 z_2 轴重合, 可绕 z_2 旋转; $S(O - x, y, z)$ 及 $S_p(O_p - x_p, y_p, z_p)$ 为两个空间固定坐标系, z 轴与蜗杆的回转轴重合, z_p 轴与蜗轮的回转轴重合, 两轴线之间夹角 $\Sigma = 90^\circ$ 。 x 轴与 x_p 轴重合, oo_p 为蜗轮和蜗杆的中心距 A_0 , M 为蜗轮蜗杆啮合线上的点。

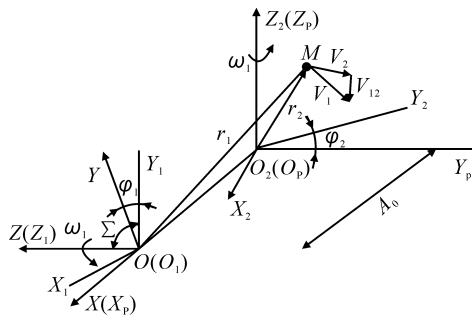


图2 蜗轮与蜗杆相对位置关系

啮合运动中,蜗杆绕 z_1 轴转过 ϕ_1 角时,对应的蜗轮绕 z_2 轴转过 ϕ_2 角, ϕ_1 与 ϕ_2 的关系满足传动比 $i_{12} = \frac{\phi_1}{\phi_2}$ 。根据空间坐标关系,可得蜗轮坐标系 S_2 与蜗杆坐标系 S_1 关系式 M_{21} 为

$$M_{21} = M_{2p} M_{p0} M_{01} \quad (4)$$

蜗杆齿面转换到 $S_2(O_2 - x_2, y_2, z_2)$ 为

$$\mathbf{r}_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = M_{21} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \quad (5)$$

$$= \begin{pmatrix} x_1 \cos\phi_1 \cos\phi_2 - y_1 \sin\phi_1 \cos\phi_2 - z_1 \sin\phi_2 + A_0 \cos\phi_2 \\ -x_1 \cos\phi_1 \sin\phi_2 + y_1 \sin\phi_1 \sin\phi_2 - z_1 \cos\phi_2 - A_0 \sin\phi_2 \\ x_1 \sin\phi_1 + y_1 \cos\phi_1 \end{pmatrix}$$

2.3 相对运动速度

根据空间中蜗轮蜗杆副的啮合运动,其速度关系有

$$\mathbf{v}_{12} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 = \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{r}_1 + \mathbf{v}_{10} - \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{r}_2 - \mathbf{v}_{20}$$

$$= \begin{pmatrix} -\omega_1 (x_1 \sin\phi_1 + y_1 \cos\phi_1 + i_{21} z_1) \\ \omega_1 (x_1 \cos\phi_1 - y_1 \sin\phi_1) \\ \omega_1 (x_1 \cos\phi_1 - y_1 \sin\phi_1 + a) i_{21} \end{pmatrix} \quad (6)$$

2.4 啮合方程

根据齿轮啮合原理,蜗轮蜗杆齿面在啮合时呈线接触,在其切点处有公共法线 \mathbf{n}_x 和相对运动速度 \mathbf{v}_{12} ,两者必然垂直,这样既保证了两个齿面能够连续接触,又不脱离和干涉,故蜗轮蜗杆啮合时应满足方程式

$$\mathbf{n}_x \cdot \mathbf{v}_{12} = \begin{pmatrix} n_{x1} \cos\phi_1 - n_{y1} \sin\phi_1 \\ n_{x1} \sin\phi_1 + n_{y1} \cos\phi_1 \\ n_{z1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\omega_1 (x_1 \sin\phi_1 + y_1 \cos\phi_1 + i_{21} z_1) \\ \omega_1 (x_1 \cos\phi_1 - y_1 \sin\phi_1) \\ \omega_1 (x_1 \cos\phi_1 - y_1 \sin\phi_1 + a) i_{21} \end{pmatrix} = 0 \quad (7)$$

化简得啮合方程式为

$$\begin{cases} r_b \cos(\tau + \phi_1) + (r_b u - p^2 \theta / r_b) \sin(\tau + \phi_1) = p / i_{21} - A_0 \\ \tau = \sigma_0 + u + \theta \end{cases} \quad (8)$$

2.5 蜗轮齿面方程及单位法矢

联立式(2)、式(5)及式(8)求解得蜗轮齿面方程

$$\begin{cases} x_2 = x_1 \cos\phi_1 \cos\phi_2 - y_1 \sin\phi_1 \cos\phi_2 - z_1 \sin\phi_2 + A_0 \cos\phi_2 \\ y_2 = -x_1 \cos\phi_1 \sin\phi_2 + y_1 \sin\phi_1 \sin\phi_2 - z_1 \cos\phi_2 - A_0 \sin\phi_2 \\ z_2 = x_1 \sin\phi_1 + y_1 \cos\phi_1 \\ x_1 = r_b \cos\tau + r_b u \sin\tau \\ y_1 = r_b \sin\tau + r_b u \cos\tau \\ z_1 = p(\tau - u - \theta) \\ r_b \cos(\tau + \phi_1) + (r_b u - p^2 \theta / r_b) \sin(\tau + \phi_1) = p / i_{21} - A_0 \\ \tau = \sigma_0 + u + \theta \\ \phi_2 = i_{21} \phi_1 \end{cases} \quad (9)$$

由式(3)和式(9)得到蜗轮齿面法矢方程式及单位法矢方程式有

$$\mathbf{n}_{x2} = \begin{pmatrix} n_{x1} \cos\phi_1 \cos\phi_2 - n_{y1} \sin\phi_1 \cos\phi_2 - n_{z1} \sin\phi_2 + A_0 \cos\phi_2 \\ -n_{x1} \cos\phi_1 \sin\phi_2 + n_{y1} \sin\phi_1 \sin\phi_2 - n_{z1} \cos\phi_2 - A_0 \sin\phi_2 \\ n_{x1} \sin\phi_1 + n_{y1} \cos\phi_1 \end{pmatrix} \quad (10)$$

$$e = \frac{n_{x1} i + n_{y1} j + n_{z1} k}{\sqrt{n_{x1}^2 + n_{y1}^2 + n_{z1}^2}} \quad (11)$$

由此可知,蜗杆的右齿面对应蜗轮的左齿面。

3 编程与实例计算

蜗轮蜗杆的基本参数见表1。根据基本参数求解蜗轮左齿面(见图3)。

表1 蜗杆的基本参数表

基本参数名称	参数值
蜗杆头数 z_1	$z_1 = 2$
蜗轮齿数 z_2	$z_2 = 40$
齿形角 α	$\alpha = 20^\circ$
模数 m	$m = 5$
分度圆直径 d_1	$d_1 = 50$
旋向	R
变位系数 x_2	$x_2 = 0$
齿顶高系数 h^*	$h^* = 1$
顶系系数 c^*	$c^* = 0.2$

蜗轮齿面特性:对于右旋蜗杆传动,在 $z = r_b$ 截面上的右齿廓和 $z = -r_b$ 截面上的左齿廓为渐开线,且该渐开线的基圆半径 $r_{b2} = r_2 \cos\gamma_b$ 。利用此特性对求解齿面进行验证,求齿面与 $z = -r_b$ 平面的截交线,获得截线离散点。对离散点进行渐开线曲线拟合,获得拟合渐开线方程为

$$\begin{cases} x_f = 92.1444 \cos(0.1076 + u) + 92.1444 u \sin(0.1076 + u) \\ y_f = 92.1444 \sin(0.1076 + u) - 92.1444 u \cos(0.1076 + u) \end{cases} \quad (12)$$

经计算可得： $r_{b2f} = 92.1444 \approx r_2 \cos\gamma_b = r_{b2}$, $\sigma_0 = 0.1076$, 拟合最大误差值 $\Delta_{\max} = 1.6852 \times 10^{-8} \text{ mm}$, 说明上述理论推导与求证正确。

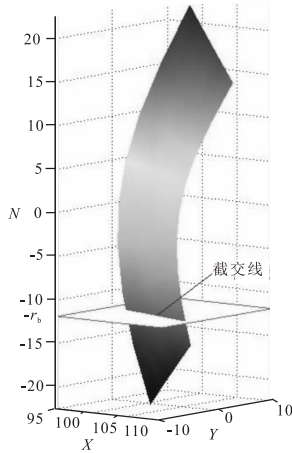


图 3 蜗轮左齿面

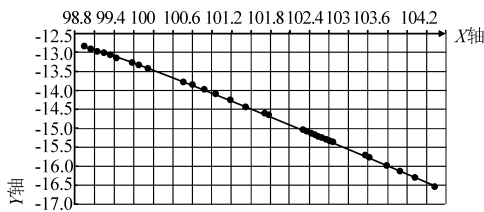


图 4 截交线的渐开线拟合

4 齿面测量的网格化分

进行齿面网格划分是为后续误差计算中测量齿面点做准备。蜗轮齿面是比较复杂的三维空间曲面,直接进行网格划分存在很大的困难,故先对其进行二维网格划分,将三维齿面投影到二维平面上后完成几何均布的二维网格划分。图 5 为在蜗轮齿面的旋转投影面上进行的网格规划。

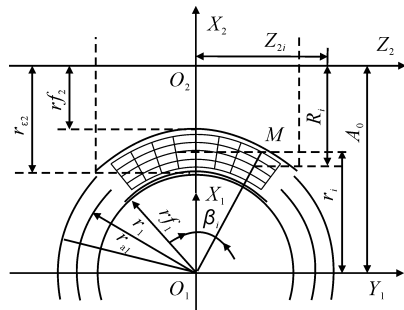


图 5 蜗轮齿面网格化划分

由图 5 可知,网格划分由角度 β 和蜗杆半径 r 两个参数决定。 β 由蜗轮齿宽缩进后取值,等分为 9 份; r 方向以分度圆为中间基准,由齿顶和齿根向分度圆处缩进后取值,分为 5 份,共 $9 \times 5 = 45$ 个点。根据图中几何关系有

$$\begin{cases} f_1(u, \theta, \varphi_1) = r_i \tan\beta_i - z_{2i} = 0 \\ f_2(u, \theta, \varphi_1) = x_{2i}^2 + y_{2i}^2 - R_i^2 = 0 \end{cases} \quad (13)$$

联立式(13)与式(9)求解,即可得到网格点的坐标与法矢。利用 MATLAB 对方程组进行求解的过程见图 6。

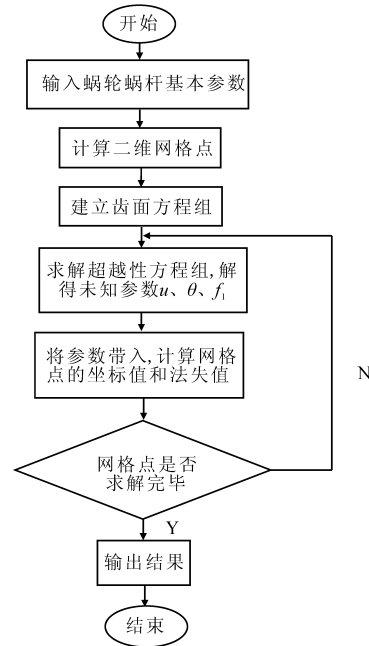


图 6 齿面网格划分求解流程

求解得到齿面 45 个网格点的坐标值及单位法矢量值(见表 2)。

表 2 齿面网格点的坐标值及法矢量值

序号	x	y	z	n_x	n_y	n_z
1	105.98554	-4.38374	-13.04387	-0.06560	-0.99754	-0.02478
2	104.72443	-3.58861	-13.93322	-0.07164	-0.99660	-0.04078
3	103.45698	-2.82845	-14.82258	-0.07159	-0.99593	-0.05480
4	102.39626	-2.22461	-15.56370	-0.06742	-0.99560	-0.06512
...
21	102.99251	-1.24201	0.00000	0.11021	-0.97041	0.21483
22	101.49829	-0.58968	0.00000	0.10492	-0.97308	0.20519
23	100.00000	0.00000	0.00000	0.10509	-0.97515	0.19503
24	98.74902	0.43989	0.00000	0.10983	-0.97635	0.18622
25	97.49648	0.82886	0.00000	0.11938	-0.97693	0.17707
...
41	106.06245	1.70546	13.04387	0.09522	-0.93779	0.33390
42	104.75515	2.53827	13.93322	0.10798	-0.93608	0.33481
43	103.44271	3.30943	14.82258	0.12401	-0.93398	0.33512
44	102.34605	3.90244	15.56370	0.14012	-0.93179	0.33487
45	101.24757	4.44755	16.30483	0.15909	-0.92904	0.33404

5 结语

本文对渐开线蜗轮蜗杆副(ZI型)进行分析,运用空间啮合原理推导蜗轮齿面及单位法矢量方程式,进行实例计算并完成齿面的特性验证;对蜗轮齿面

双组探头螺纹中径直接测量仪的设计与分析

刘冠诚¹, 刘冠毅², 刘清³

¹沈阳建筑大学; ²中北大学; ³河北省唐山市曹妃甸区城市投资公司

摘要: 基于螺纹中径的定义提出一种全新的直接测量螺纹中径的方法。相对于传统测量方法,该方法具有测量范围大、操作简单、效率高、读数直观、成本低等优点,可用于学校、工厂的教学演示和常规测量,具有较高的应用适应性。

关键词: 测量仪器;螺纹中径;直接测量;教学演示

中图分类号: TG85;TG806;TH162

文献标志码: A

Design of Direct Measuring Instrument with Two Sets of Probe for Thread Pitch Diameter

Liu Guancheng, Liu Guanyi, Liu Qing

Abstract: Based on the definition of the thread pitch diameter, a new method for directly measuring the pitch diameter is proposed. Compared with the traditional measuring methods, the new method features large measuring range, easy operation, high efficiency, visual readout and low cost. The instrument using this method can be applied to teaching demonstrations in school and factory and routine measurement.

Keywords: measuring instrument; thread pitch diameter; direct measurement; teaching demonstration

1 引言

螺纹中径为假想圆柱母线通过牙型上凸起和沟槽宽度相等的假想圆柱直径^[1,2],其值是检验精密螺纹是否合格的一个重要指标^[3,4]。目前,国内外通用高精度螺纹中径测量主要采用接触式测量和非接触式扫描测量两种方法。接触式扫描测量常用三针测量法^[5,6](简称“三针法”),但对于小螺纹和较大螺纹的测量存在一定的局限性^[7],操作不方便。非接触式扫描测量采用 CCD 成像原理,对被检测螺纹的表面质量要求较高。螺纹的表面质量、牙型角、外界环境等因素对非接触式测量的测量范围、稳定

性和测量精度等有一定的影响^[8-10]。

本文设计的双组探头螺纹中径直接测量仪可以解决上述问题。该测量仪的机械结构合理,工艺性好,可满足测量精度需要;控制系统程序精准,处理快速,测量结果可直接显示在显示屏上,能方便快捷地检测螺纹中径。双组探头螺纹中径直接测量仪已获国家发明专利(专利号:CN201410430091.2)和实用新型专利(专利号:CN201420490141.1)。

2 测量仪工作原理

2.1 工作原理

以螺纹中径定义(牙型凸起与牙型沟槽宽度相等)为出发点,用两对球型探针测量螺纹凸起与沟槽宽度(见图1)。

收稿日期:2017年5月

进行网格划分,得到网格点坐标值及单位法矢值,可为后续测量工作做好准备。

参考文献

- [1] 吴序堂. 齿轮啮合原理[M]. 北京:机械工业出版社, 1984.
- [2] 傅则绍. 微分几何与齿轮啮合原理[M]. 东营:石油大学出版社, 1999.
- [3] 成熙治, 刘法权. 蜗轮蜗杆测量[M]. 北京:中国计量出版社, 1991.
- [4] 李蔚, 劳奇成, 李平. 在 CNC 上实现蜗轮齿形误差的自动

检测[J]. 西安工业大学学报, 2002, 22(4): 283-287.

第一作者:杨涛, 硕士研究生, 西安工业大学机电工程学院, 710021 西安市

First Author: Yang Tao, Postgraduate, School of Electrical and Mechanical Engineering, Xi'an Technological University, Xi'an 710021, China

通信作者:劳奇成, 教授, 西安工业大学机电工程学院, 710021 西安市

Corresponding Author: Lao Qicheng, Professor, School of Electrical and Mechanical Engineering, Xi'an Technological University, Xi'an 710021, China