

# 齿轮滚插刀的设计理论研究

张恒<sup>1</sup>, 辛佳毅<sup>2</sup>, 王时英<sup>1</sup>, 吕明<sup>1</sup>

<sup>1</sup>太原理工大学机械工程学院及精密加工山西省重点实验室;<sup>2</sup>太原工具厂有限责任公司

**摘要:** 根据齿轮齿面的形成过程建立齿轮齿面的数学模型,得到齿轮齿面方程及其法向矢量;基于交错轴螺旋齿轮啮合原理建立滚插加工的运动坐标系,确定滚插刀与工件的运动关系,并以曲面共轭原理为基础,求得齿轮齿面的共轭曲面方程;选择平面作为滚插刀的前刀面并建立坐标系,获得前刀面的数学方程;最后借助曲面与平面求交理论与改进的欧拉法,得到了滚插刀的切削刃方程。

**关键词:** 滚插刀;曲面共轭原理;曲面与平面求交;欧拉法

中图分类号: TG721;TH111

文献标志码: A

DOI:10.3969/j.issn.1000-7008.2021.08.012

## Study on Design Theory of Gear Skiving

Zhang Heng, Xin Jiayi, Wang Shiyang, Lv Ming

**Abstract:** According to the formation process of the gear tooth surface, the mathematical model of the gear tooth surface is established, and the gear tooth surface equation and its normal vector are obtained. Based on the meshing principle of the space cross-axis helical gear, the motion coordinate system of the gear skiving processing is established, the movement relationship between the gear skiving cutter and the workpiece is determined. Based on the principle of surface conjugation to obtain the conjugate surface equation of the gear tooth surface, a plane as the rake surface of the gear skiving cutter and establish a coordinate system to obtain the mathematical equation of the rake surface is selected. By using the surface and plane intersection theory and improved Euler method, the cutting edge equation of the gear skiving cutter is obtained.

**Keywords:** gear skiving; surface conjugation principle; intersection principle of surface and plane; explicit method

## 1 引言

上世纪五六十年代,国际上出现了一种新的齿轮加工方法,因其加工方式包含滚齿和插齿两种加工方法,故将其命名为滚插刀。它可以加工非贯通无退刀槽的内螺旋齿圆柱齿轮和各种类型的齿轮,具有加工效率高、精度高、成本低和绿色环保等特

点,与现有的齿轮加工方法相比具有明显的优势<sup>[1]</sup>。前苏联、德国和美国都对这种新的齿轮加工方法进行了一定程度的研究,但是当时受各种条件限制,滚插刀并没有得到大范围的使用。直到进入21世纪,随着各种新型机床的出现和技术水平的提高,各个国家的学者们对滚插刀又进行了深入的研究。

宋洪金<sup>[2]</sup>和陈新春<sup>[3]</sup>均以插齿刀的设计理论为基础对刮齿刀前刀面和后刀面进行设计,把前刀面设计成球面,后刀面设计为渐开线螺旋面,并对滚

基金项目: 山西省自然科学基金(201801D121176)

收稿日期: 2021年3月

- [6]李郁,田卫军,雷玲,等. 航空典型难加工材料切削加工技术研究进展[J]. 装备制造技术,2018(4):12-17.
- [7]毕仁贵,吴顺兴,刘志勇,等. 加工参数对高速铣削超高强度钢 32Cr3NiMoVA 刀具磨损的影响[J]. 现代制造工程,2019(8):10-13,24.
- [8]陶亮,陈海虹,周知进,等. Inconel 718 高温合金切削温度仿真及参数优化研究[J]. 组合机床与自动化加工技术,2020(6):165-168.
- [9]丁建宾,刘向阳,刘红彬,等. 基于 Unity3D 的切削力和切削温度虚拟仿真实验平台[J]. 现代制造技术与装备,2020,56(7):99-101.
- [10]张慧萍,刘壬航,李珍灿,等. 300M 超高强度钢高速切削过程仿真研究[J]. 机械科学与技术,2017,36(10):

1550-1555.

- [11]王晔,马廉洁,左宇辰,等. 基于鱼群优化 BP 神经网络的切削温度建模[J]. 组合机床与自动化加工技术,2019(11):22-24.
- [12]王立国,杜劲,郭延阔,等. 不同涂层刀具切削淬硬 H13 钢加工性能研究[J]. 工具技术,2017,51(8):41-44.
- [13]杜劲,刘战强,张静婕,等. 涂层刀具切削淬硬 H13 模具钢的切削性能研究[J]. 工具技术,2016,50(10):8-11.
- 第一作者:姜增辉,教授,沈阳理工大学机械工程学院,110159 沈阳市

First Author: Jiang Zenghui, Professor, School of Mechanical Engineering, Shenyang Ligong University, Shenyang 110159, China

插刀的齿形误差进行分析,提出了相应的齿廓修形方法,并对刀具参数进行了优化。之后,陈新春等<sup>[4]</sup>对滚插刀进行了改进,把滚插刀的后刀面设计成圆锥面,前刀面设计成球面,并对齿形误差进行分析和计算。马恩旭<sup>[5]</sup>介绍了滚插刀的基本类型,提出了滚插刀结构的设计要求,采用平面作为滚插刀前刀面,把顶后刀面和侧后刀面分别设计为圆锥面和螺旋面,通过建立滚插刀前刀面坐标系计算车齿刀刀形,提出了调整渐开线基圆和压力角对车齿刀齿形进行修正的方法。Antoniadis A.<sup>[6]</sup>基于 CAD 软件模拟了滚插的运动过程,并分析了未变形切屑的几何形状和产生的切削力。Klocke F. 等<sup>[7]</sup>研究了切屑厚度、切削速度和滑动速度对加工误差的影响,并基于渗透计算加工的数值模拟,之后进行了切削试验,并对产生的刀具磨损进行了分析。Tapoglou N.<sup>[8]</sup>提出了一种新的仿真模型,该模型能够准确预测未变形切屑的几何形状、切削过程中产生切屑的方式和切屑的尺寸以及齿隙的特征。通过仿真代码可以实现滚插加工过程的虚拟仿真,并介绍了在不同条件下加工内齿轮和外齿轮时切屑的几何形状和尺寸。Bruno Vargas 等<sup>[9]</sup>通过局部前角对切削力的影响来计算局部切削力,在数值模型中建立了具有附加系数的 Kienzle 力学模型,并通过试验发现,前角在较大的参数范围内变化可以提高模型的精度。McCloskey P. 等<sup>[10]</sup>建立了一种新的虚拟模型,用于测量加工过程中未切削的切屑几何形状和切削力。

目前,在滚插刀原理和设计等方面已经取得了一定的研究成果,但离实际生产仍有一定差距,尤其是滚插刀的设计理论不够系统和完善,还需要进一步的研究。本文借助共轭曲面和曲面与平面求交的理论对滚插刀进行设计,完善滚插刀的设计理论。

## 2 滚插刀加工原理

滚插刀加工是基于空间交错轴螺旋齿轮运动原理并且异于传统齿轮加工的一种全新齿轮加工方法。图 1 为滚插刀的实际加工,滚插刀以角速度  $\omega_1$  顺时针方向旋转,并以速度  $v$  向前进给,工件以角速度  $\omega_2$  顺时针方向与滚插刀同步旋转。在加工过程中,从刀具的切削点接触工件开始到刀具离开工件之前,切屑始终被顶在刀具的前刀面上,在滚插刀离开工件齿轮的瞬间实现断屑,并完成一次切削;之后刀具对工件进行多次切削直到加工出完整的齿轮齿面<sup>[11]</sup>。

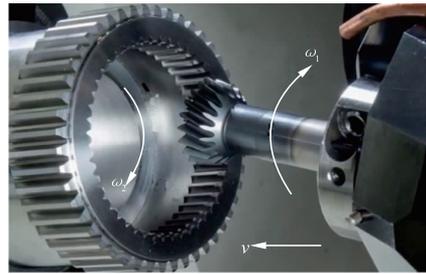


图 1 滚插刀加工

图 2 为滚插刀的加工原理。在加工中,刀具的轴线与工件的轴线倾斜形成一定的角度,称其为轴交角  $\Sigma$ 。轴交角的大小由刀具和工件的螺旋角共同决定,有

$$\Sigma = |\beta_1 \pm \beta_2| \quad (1)$$

式中,  $\beta_1$  为刀具的螺旋角;  $\beta_2$  为工件的螺旋角。

在式(1)中,当刀具与工件的旋转方向相同时,加工内齿轮取负,加工外齿轮取正;当刀具与工件的旋转方向相反时,加工内齿轮取取正,加工外齿轮取负。

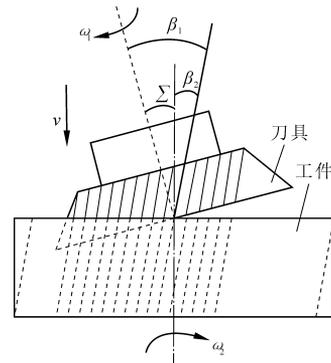


图 2 加工原理

## 3 齿轮共轭曲面的设计计算

### 3.1 齿轮齿面的建模和计算

建立如图 3 所示的齿轮齿面坐标系  $s_2 (o_2 - x_2, y_2, z_2)$ , 坐标原点  $o_2$  为渐开线  $gh$  的基圆圆心,  $x_2$  轴通过渐开线  $gh$  的起点  $g$ 。其中,  $r_b$  为渐开线  $gh$  基圆半径,  $p$  点为渐开线  $gh$  上任意的一点, 其法线与基圆相切于  $N$  点, 令  $\angle goN = \varphi$ , 则  $pN = r_b \varphi$ 。

渐开线  $gh$  运动一段时间到渐开线  $g'h'$ ,  $p'$  点法线与基圆相切于  $N'$  点, 其中  $\angle No_2N' = \theta$ 。因此, 渐开线  $gh$  的方程为

$$\begin{cases} x_0 = r_b \cos \varphi + r_b \varphi \sin \varphi \\ y_0 = r_b \sin \varphi - r_b \varphi \cos \varphi \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} x'_0 = r_b \varphi \cos \varphi \\ y'_0 = r_b \varphi \sin \varphi \end{cases} \quad (3)$$

渐开线  $gh$  绕  $z_2$  轴作螺旋运动形成的齿轮齿面

方程为

$$\begin{cases} x_2 = x_0 \cos\theta - y_0 \sin\theta = r_b \cos(\varphi + \theta) + r_b \varphi \sin(\varphi + \theta) \\ y_2 = x_0 \sin\theta + y_0 \cos\theta = r_b \sin(\varphi + \theta) - r_b \varphi \cos(\varphi + \theta) \\ z_2 = p\theta \end{cases} \quad (4)$$

式中,  $p$  为斜齿轮的螺旋参数,  $p = \frac{\text{导程 } p_z}{2\pi}$ , 其意义为渐开线母线绕  $z_2$  轴转过单位角度时, 沿轴线方向移动的距离;  $\theta$  为母线从起始点绕  $z_2$  轴转过的角度, 顺着  $z_2$  轴以顺时针方向为正。可得, 齿轮齿面的法向矢量  $N_2$  为

$$\begin{cases} n_{x_2} = p(x'_0 \sin\theta + y'_0 \cos\theta) = pr_b \varphi \sin(\varphi + \theta) \\ n_{y_2} = -p(x'_0 \cos\theta - y'_0 \sin\theta) = -pr_b \varphi \cos(\varphi + \theta) \\ n_{z_2} = x_0 x'_0 + y_0 y'_0 = \frac{n_{x_2} y_2 - n_{y_2} x_2}{p} = r_b^2 \varphi^2 \end{cases} \quad (5)$$

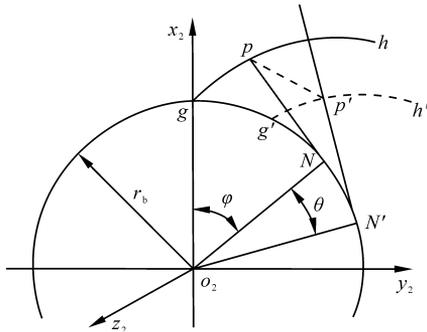


图3 齿面渐开线坐标系

### 3.2 齿轮齿面共轭曲面计算

建立如图4所示的坐标系,  $s_1(o_1 - x_1, y_1, z_1)$  为刀具的运动坐标系, 其中坐标原点  $o_1$  与滚插刀的前端面中心点重合,  $z_1$  轴与滚插刀的轴线重合并指向刀具的运动方向,  $x_1$  轴与滚插刀的一个顶切削刃中心线重合,  $y_1$  轴的正方向根据右手定则确定。  $s_2(o_2 - x_2, y_2, z_2)$  为工件的运动坐标系, 其中坐标原点  $o_2$  与工件的前端面圆心重合,  $z_2$  轴与工件的轴线重合并指向工件的实体。空间坐标系  $s(o - x, y, z)$  和  $s_p(o_p - x_p, y_p, z_p)$  分别为刀具和工件的原始固定坐标系, 其中  $x$  轴和  $x_p$  轴重合,  $z$  轴和  $z_p$  轴重合, 坐标原点  $o$  和  $o_p$  沿  $x$  轴的最短距离为  $a$ ,  $z$  轴与  $z_p$  轴的夹角为  $\Sigma$ 。

在运动开始前, 坐标系  $s_1$  和  $s_2$  分别与坐标系  $s$  和  $s_p$  重合; 加工时, 滚插刀以角速度  $\omega_1$  绕  $z_1$  轴作旋转运动, 并沿  $z_1$  轴正方向以速度  $v$  进给, 工件以角速度  $\omega_2$  绕  $z_2$  轴作旋转运动。加工一段时间后, 滚插刀转过的角度为  $\varphi_1$ , 并沿  $z_1$  轴正方向移动距离  $l_1$ , 工件转过的角度为  $\varphi_2$ , 坐标系  $s_1$  和  $s_2$  也做相同的运动(见图4)。为方便表示, 分别用  $i, j, k, i_p, j_p,$

$k_p$  来表示  $x, y, z, x_p, y_p, z_p$  轴的方向单位矢量。

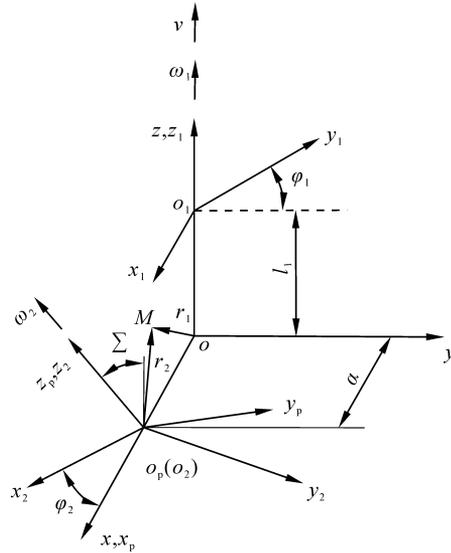


图4 加工运动坐标系

设点  $M$  为工件齿面与其共轭曲面的接触点, 其在坐标系  $S$  中的坐标为  $(x, y, z)$ 。坐标系  $S$  中刀具绕  $z$  轴旋转的角速度为

$$\omega_1 = \omega_1 k \quad (6)$$

坐标系  $S$  中刀具沿  $z$  轴正方向进给移动的速度为

$$v = vk \quad (7)$$

$M$  点随刀具的运动速度为

$$v_1 = \omega_1 \times r_1 + v \quad (8)$$

坐标系  $S$  中工件绕  $z_p$  轴旋转的角速度为

$$\omega_2 = \omega_2 k_p \quad (9)$$

其中,  $k_p = k \cos \Sigma + j \sin \Sigma$ , 所以点  $M$  在工件上的运动速度为

$$v_2 = \omega_2 \times r_2 \quad (10)$$

点  $M$  的相对运动速度为

$$v_{12} = \omega_1 \times r_1 + v - \omega_2 \times r_2 \quad (11)$$

其中

$$\begin{cases} r_1 = xi + yj + zk \\ r_2 = O_p M = r_1 - OO_p = r_1 - ai = (x - a)i + yj + zk \end{cases}$$

将式(6)、式(7)、式(9)、式(10)代入式(11)得

$$v_{12} = v_{12x}i + v_{12y}j + v_{12z}k \quad (12)$$

其中

$$\begin{aligned} v_{12x} &= -\omega_1 y - \omega_2 z \sin \Sigma + \omega_2 y \cos \Sigma \\ v_{12y} &= \omega_1 x - \omega_2 (x - a) \cos \Sigma \\ v_{12z} &= v + \omega_2 (x - a) \sin \Sigma \end{aligned}$$

一对共轭曲面不论是线接触还是点接触, 其在接触点处一定满足啮合方程, 有

$$v_{12} N = 0 \quad (13)$$

坐标系  $S_2$  到坐标系  $S$  的坐标变换矩阵为

$$M_{O_2} = M_{Op} M_{P_2}$$

其中

$$M_{Op} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ a & \cos\Sigma & -\sin\Sigma & 0 \\ 0 & \sin\Sigma & \cos\Sigma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, M_{P_2} = \begin{bmatrix} \cos\varphi_2 & -\sin\varphi_2 & 0 & 0 \\ \sin\varphi_2 & \cos\varphi_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

所以有

$$\begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \\ t \end{pmatrix} = M_{O_2} \begin{pmatrix} n_{x_2} \\ n_{y_2} \\ n_{z_2} \\ t_2 \end{pmatrix}$$

齿轮齿面的法向矢量在坐标系  $S$  中表示为

$$N = \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_{x_2} \cos\varphi_2 - n_{y_2} \sin\varphi_2 \\ n_{x_2} \cos\Sigma \sin\varphi_2 + n_{y_2} \cos\Sigma \cos\varphi_2 - n_{z_2} \sin\Sigma \\ n_{x_2} \sin\Sigma \sin\varphi_2 + n_{y_2} \sin\Sigma \cos\varphi_2 + n_{z_2} \cos\Sigma \end{pmatrix} \quad (14)$$

将式(12)和式(14)代入式(13)得

$$\begin{aligned} v_{12} N &= (v_{12x} \mathbf{i} + v_{12y} \mathbf{j} + v_{12z} \mathbf{k}) (n_x \mathbf{i} + n_y \mathbf{j} + n_z \mathbf{k}) \\ &= \cos\varphi_2 (v_{12x} n_{x_2} + v_{12y} n_{y_2} \cos\Sigma + v_{12z} n_{z_2} \sin\Sigma) \\ &\quad + \sin\varphi_2 (-v_{12x} n_{y_2} + v_{12y} n_{x_2} \cos\Sigma + v_{12z} n_{z_2} \sin\Sigma) \\ &\quad + n_{z_2} (v_{12z} \cos\Sigma - v_{12y} \sin\Sigma) = 0 \end{aligned}$$

由于  $v_{12x}, v_{12y}, v_{12z}, n_{x_2}, n_{y_2}, n_{z_2}$  为已知参数, 由此可以求得工件绕  $z_p$  轴转过的角度  $\varphi_2$ , 进而求得

$$\varphi_1 = \frac{\omega_1 \varphi_2}{\omega_2}, l_1 = v \times \frac{\varphi_1}{\omega_1}$$

因为

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = M_{O_1} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = M_{Op} M_{P_2} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

所以, 坐标系  $S_1$  到坐标系  $S_2$  的转换方程为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ 1 \end{pmatrix} = M_{10} M_{Op} M_{P_2} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (15)$$

其中

$$M_{O_1} = \begin{bmatrix} \cos\varphi_1 & -\sin\varphi_1 & 0 & 0 \\ \sin\varphi_1 & \cos\varphi_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_{10} = \begin{bmatrix} \cos\varphi_1 & \sin\varphi_1 & 0 & 0 \\ -\sin\varphi_1 & \cos\varphi_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

进而可求得齿轮齿面的共轭曲面方程为

$$\begin{cases} x_1 = (\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 + \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \cos\Sigma) x_2 + \\ (-\cos\varphi_1 \sin\varphi_2 + \sin\varphi_1 \cos\varphi_2 \cos\Sigma) y_2 - z_2 \sin\varphi_1 \sin\Sigma + a \cos\varphi_1 \\ y_1 = (-\sin\varphi_1 \cos\varphi_2 + \cos\varphi_1 \sin\varphi_2 \cos\Sigma) x_2 + \\ (\sin\varphi_1 \sin\varphi_2 + \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 \cos\Sigma) y_2 - z_2 \cos\varphi_1 \sin\Sigma - a \sin\varphi_1 \\ z_1 = x_2 \sin\Sigma \sin\varphi_2 + y_2 \sin\Sigma \cos\varphi_2 + z_2 \cos\Sigma - l_1 \end{cases} \quad (16)$$

### 3.3 齿轮齿顶面的共轭曲面计算

在工件端面建立如图5所示的坐标系,  $r_a$  为内斜齿轮的齿顶圆半径, 工件齿顶圆上任意一点  $C$  与原点  $O_{2c}$  的连线与  $x_{2c}$  轴的夹角为  $\sigma$ , 取  $\angle CO_{2c}g = \sigma$  作为参变量, 则工件的齿顶圆方程为

$$\begin{cases} x_{2c} = r_a \cos\sigma \\ y_{2c} = r_a \sin\sigma \end{cases} \quad (17)$$

所以, 工件齿顶处圆柱面的方程为

$$\begin{cases} x_{2c} = r_a \cos\sigma \\ y_{2c} = r_a \sin\sigma \\ z_{2c} = p\theta \end{cases} \quad (18)$$

式中,  $p$  为斜齿轮的螺旋参数;  $\theta$  为  $p$  点绕  $z_{2c}$  轴转过的角度。

坐标系  $S_{1c}$  到坐标系  $S_{2c}$  的转换方程为

$$\begin{pmatrix} x_{1c} \\ y_{1c} \\ z_{1c} \\ 1 \end{pmatrix} = M_{10} M_{Op} M_{P_2} \begin{pmatrix} x_{2c} \\ y_{2c} \\ z_{2c} \\ 1 \end{pmatrix} \quad (19)$$

进而可求得齿轮齿顶处圆柱面的共轭曲面方程为

$$\begin{cases} x_{1c} = (\cos\varphi_2 \cos\varphi_2 + \cos\Sigma \sin\varphi_1 \sin\varphi_2) r_a \cos\sigma + \\ (-\sin\varphi_2 \cos\varphi_2 + \cos\Sigma \cos\varphi_2 \sin\varphi_1) r_a \sin\sigma - \sin\Sigma \sin\varphi_1 p\theta + a \cos\varphi_2 \\ y_{1c} = (-\sin\varphi_2 \cos\varphi_2 + \cos\Sigma \sin\varphi_2 \cos\varphi_1) r_a \cos\sigma + \\ (\sin\varphi_2 \sin\varphi_2 + \cos\Sigma \cos\varphi_1 \cos\varphi_2) r_a \sin\sigma - \sin\Sigma \cos\varphi_1 p\theta - a \sin\varphi_2 \\ z_{1c} = r_a \cos\sigma \sin\Sigma \sin\varphi_2 + r_a \sin\sigma \sin\Sigma \cos\varphi_2 + p\theta \cos\Sigma - l_1 \end{cases} \quad (20)$$

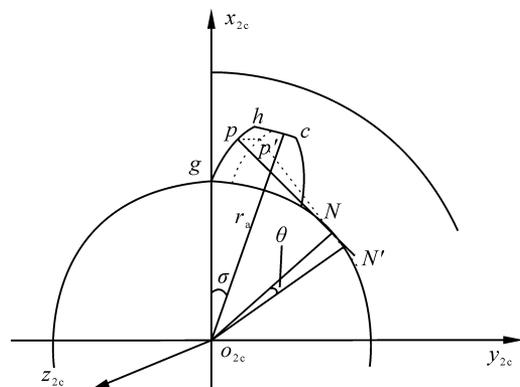


图5 齿轮齿顶面坐标系

### 4 刀具前刀面的求取

将刀具前刀面设计成平面,建立如图 6 所示的前刀面坐标系  $s_q(o_q - x_q, y_q, z_q)$ ,  $s_1(o_1 - x_1, y_1, z_1)$  为滚插刀的运动坐标系,其中坐标原点  $o_1$  与滚插刀前端面圆心重合,  $z_1$  轴与刀具的轴线重合并指向刀具,  $x_1$  轴与滚插刀的一个刀齿的对称线共面,  $y_1$  轴的正方向由右手定则确定。

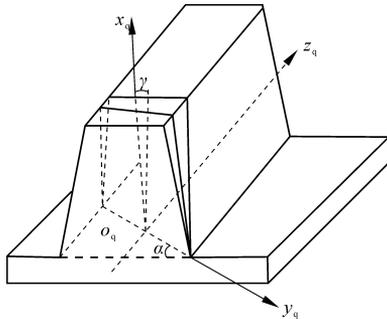


图 6 前刀面坐标系

坐标系  $s_1(o_1 - x_1, y_1, z_1)$  沿  $x_1$  轴正方向移动距离  $r$ , 并绕  $y_1$  轴旋转  $\gamma$  角度, 得到坐标系  $s'_{q'}(o'_{q'} - x'_{q'}, y'_{q'}, z'_{q'})$ , 其中  $r$  为刀具产形轮分度圆半径,  $\gamma$  为滚插刀前角。坐标系  $s'_{q'}$  绕  $x'_{q'}$  轴旋转  $\alpha$  角度, 得到前刀面的坐标系  $s_q(o_q - x_q, y_q, z_q)$ 。因为  $z_q$  轴与滚插刀前刀面垂直, 则在坐标系  $s_q(o_q - x_q, y_q, z_q)$  中, 前刀面的法向矢量为

$$n_q = (0, 0, 1)^T$$

坐标系  $s_q$  到坐标系  $s'_{q'}$  的转换方程为

$$\begin{pmatrix} x'_{q'} \\ y'_{q'} \\ z'_{q'} \\ 1 \end{pmatrix} = M_{q'q} \begin{pmatrix} x_q \\ y_q \\ z_q \\ 1 \end{pmatrix} \quad (21)$$

其中

$$M_{q'q} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

坐标系  $s'_{q'}$  到坐标系  $s_1$  的转换矩阵为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ 1 \end{pmatrix} = M_{1q'} \begin{pmatrix} x'_{q'} \\ y'_{q'} \\ z'_{q'} \\ 1 \end{pmatrix} \quad (22)$$

$$\text{其中, } M_{1q'} = \begin{pmatrix} \cos\gamma & 0 & -\sin\gamma & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin\gamma & 0 & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

所以可得

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ 1 \end{pmatrix} = M_{1q'} M_{q'q} \begin{pmatrix} x_q \\ y_q \\ z_q \\ 1 \end{pmatrix} \quad (23)$$

其中

$$M_{1q'} M_{q'q} = \begin{pmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma\sin\alpha & -\sin\gamma\cos\alpha & r \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma\sin\alpha & \cos\gamma\cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

坐标系  $s_1(o_1 - x_1, y_1, z_1)$  中前刀面的法向矢量  $n_1$  为

$$n_1 = M_{1q'} M_{q'q} (n_q) = (-\sin\gamma\cos\alpha, -\sin\alpha, \cos\gamma\cos\alpha)^T \quad (24)$$

因为刀具前刀面经过点  $(r, 0, 0)$ , 可以求得坐标系  $s_1$  中前刀面的方程为

$$-\sin\gamma\cos\alpha(x_1 - r) - y_1\sin\alpha + z_1\cos\gamma\cos\alpha = 0 \quad (25)$$

### 5 刀具切削刃计算

滚插刀的主切削刃是前刀面与齿轮齿面共轭曲面的交线, 滚插刀的顶刃是刀具前刀面与齿轮齿顶面共轭曲面的交线。前文已经求得齿轮齿面共轭曲面、前刀面与齿轮齿顶面共轭曲面得方程, 滚插刀切削刃的计算可以转换成自由曲面与函数曲面求交的问题。

式(16)与式(20)是关于参变量  $\varphi$  与  $\theta$  的方程, 其可以改写成双参数的自由曲面方程, 有

$$P(\varphi, \theta) = [x(\varphi, \theta)y(\varphi, \theta)z(\varphi, \theta)] \quad (26)$$

滚插刀的前刀面是函数曲面方程, 可以写为

$$g(x, y, z) = 0 \quad (27)$$

为了求滚插刀的切削刃方程, 将式(26)代入式(27), 可得

$$f(\varphi, \theta) = g(x(\varphi, \theta), y(\varphi, \theta), z(\varphi, \theta)) = 0 \quad (28)$$

式(28)即为滚插刀的切削刃方程, 分别对式中的  $\varphi$  与  $\theta$  求偏导数, 可得

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial \varphi} = \frac{\partial g}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial g}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \varphi} + \frac{\partial g}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial f}{\partial \theta} = \frac{\partial g}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial g}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \theta} + \frac{\partial g}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{cases} \quad (29)$$

由此, 可以求得其相应得增量函数分别为

$$\begin{cases} d_\varphi(x, y, z, \varphi, \theta) = \frac{\partial f}{\partial \varphi} = \frac{\partial g}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial g}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \varphi} + \frac{\partial g}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \varphi} \\ d_\theta(x, y, z, \varphi, \theta) = -\frac{\partial f}{\partial \theta} = -\left[ \frac{\partial g}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial g}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \theta} + \frac{\partial g}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \theta} \right] \end{cases} \quad (30)$$

用梯度符号和对矢量函数求偏导得法则, 式

(30)可以简化为

$$\begin{cases} d_{\varphi}(x, y, z, \varphi, \theta) = \nabla g(x, y, z) \times \frac{\partial P(\varphi, \theta)}{\partial \theta} \\ d_{\theta}(x, y, z, \varphi, \theta) = -\nabla g(x, y, z) \times \frac{\partial P(\varphi, \theta)}{\partial \varphi} \end{cases} \quad (31)$$

根据式(8)表示的增量函数,应用改进的欧拉方法,当已知滚插运动的初始位置对应的参变量 $(\varphi_0, \theta_0)$ 时,即 $x_0 = x(\varphi_0, \theta_0)$ , $y_0 = y(\varphi_0, \theta_0)$ , $z_0 = z(\varphi_0, \theta_0)$ ,可以通过下面的迭代格式求得滚插刀的主切削刃和滚插刀的顶刃上一系列点,有

预报为

$$\begin{cases} \varphi_p = \varphi_k + h \nabla g(x_k, y_k, z_k) \times \frac{\partial P}{\partial \theta}(\varphi_k, \theta_k) \\ \theta_p = \theta_k - h \nabla g(x_k, y_k, z_k) \times \frac{\partial P}{\partial \varphi}(\varphi_k, \theta_k) \\ x_p = x(\varphi_p, \theta_p) \quad y_p = y(\varphi_p, \theta_p) \quad z_p = z(\varphi_p, \theta_p) \end{cases} \quad (32)$$

校正为

$$\begin{cases} \varphi_0 = \varphi_k + h \nabla g(x_p, y_p, z_p) \times \frac{\partial P}{\partial \theta}(\varphi_p, \theta_p) \\ \theta_0 = \theta_k - h \nabla g(x_p, y_p, z_p) \times \frac{\partial P}{\partial \varphi}(\varphi_p, \theta_p) \\ \varphi_{k+1} = \frac{1}{2}(\varphi_p + \varphi_0) \quad \theta_{k+1} = \frac{1}{2}(\theta_p + \theta_0) \\ x_{k+1} = x(\varphi_{k+1}, \theta_{k+1}) \quad y_{k+1} = y(\varphi_{k+1}, \theta_{k+1}) \\ y_{k+1}^v = y(\varphi_{k+1}, \theta_{k+1}) \\ z_{k+1} = z(\varphi_{k+1}, \theta_{k+1}) \end{cases} \quad (33)$$

式(32)和式(33)中, $h$ 为步长。已知滚插加工运动初始位置对应的初始参变量 $(\varphi_0, \theta_0)$ ,用上述两式可以得到滚插刀主切削刃和顶刃的一系列点,对一系列点进行拟合,进而可以得到滚插刀的切削刃。

## 6 结语

(1)从滚插加工的概念、加工原理、断屑方式和运动模型等几个方面说明了滚插加工齿轮方法的可行性与正确定。

(2)文中提出的计算滚插刀切削刃的计算方法具有通用性,可以推广到其它形式的齿轮刀具切削刃的计算,例如非渐开线滚插刀和圆弧齿轮滚插刀等。

(3)本文仅从滚插刀切削刃的计算方面对滚插刀进行了研究,为了使滚插加工技术在实际生产中

大量应用,还应该对其做大量的试验,如刀具的寿命试验等。

## 参考文献

- [1] 吴晓强,王鹏,王利华,等. 圆柱齿轮刚齿技术发展[J]. 工具技术,2017,51(1):3-8.
- [2] 宋洪金. 一种齿轮加工新方法的理论研究及其刀具设计[D]. 长沙:湖南大学,2014.
- [3] 陈新春. 圆柱齿轮刚齿技术研究[D]. 天津:天津大学,2010.
- [4] 陈新春,李佳,贺友平. 直齿刚齿刀结构设计与计算[J]. 天津大学学报,2012,45(5):411-416.
- [5] 马恩旭. 车齿刀结构设计和车齿加工误差分析[D]. 重庆:重庆大学,2016.
- [6] Antoniadis A. Gear skiving - CAD simulation approach[J]. Computer Aided Design,2012,44(7):611-616.
- [7] Klocke F, Brecher C, Christoph Löpenhaus, et al. Technological and simulative analysis of power skiving[J]. Procedia CIRP,2016,50(5):773-778.
- [8] Tapoglou N. Calculation of non-deformed chip and gear geometry in power skiving using a CAD-based simulation[J]. The International Journal of Advanced Manufacturing Technology,2018,100(2):1779-1785.
- [9] Bruno Vargas, Matthias Zapf, Jan Klose, et al. Numerical modelling of cutting forces in gear skiving[J]. Procedia CIRP,2019,82(1):455-460.
- [10] McCloskey P, Katz A, Berglind L, et al. Chip geometry and cutting forces in gear power skiving[J]. CIRP Annals, 2019,68(1):109-112.
- [11] 娄本超. 基于自由曲面的圆柱齿轮刚齿刀具设计[D]. 天津:天津大学,2014.

第一作者:张恒,硕士研究生,太原理工大学机械与运载工程学院,030000 太原市

First Author: Zhang Heng, Postgraduate, School of Mechanical and Transportation Engineering, Taiyuan University of Technology, Taiyuan 030000, China

通信作者:王时英,博士,教授,太原理工大学机械与运载工程学院,030000 太原市

Corresponding Author: Wang Shiyang, Ph. D., Professor, School of Mechanical and Transportation Engineering, Taiyuan University of Technology, Taiyuan 030000, China